Filière PC -PSI

Durée : 4 heures - Coefficient : 10

Première partie

On étudie dans cette partie les sommes dont l'existence n'est pas à prouver :
$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ et $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$. 2π-périodique et telle que : $\forall t \in [-\pi, +\pi]$. $f(t) = t^2$.
   a) Déterminer la série de Fourier de f.
   b) Montrer que cette série de fonctions a pour somme f sur $\mathbb{R}$. Justifier ce résultat et préciser la nature de cette convergence.
   c) Calculer explicitement A.
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de B en justifiant le calcul.
3. a) On pose : $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $R_n = C - C_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que : $\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$.
   b) En déduire que : $C_n + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ est une valeur approchée de C à $\frac{1}{2n^3}$ près.
   Déterminer une valeur décimale approchée de C à 10^{-3} près.

Deuxième partie

Dans cette partie on s'intéresse à la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = n\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$

1. Montrer que la fonction g de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{pour } x \neq 0, \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$
   est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et donner $\sup_{x\in[0,+\infty[} |g(x)|$.
2. Développer g en série entière en 0. Donner le rayon de convergence de cette série entière.
3. Montrer que la fonction g est intégrable sur $[0, 1]$ et exprimer $\int_0^1 g(x)dx$ en fonction de A.
4. À l'aide d'un changement de variable dans l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$, montrer que la suite (w_n) converge et donner sa limite en fonction de A.

Troisième partie

1. Soit $K_n = n\left[n\int_0^1 \ln(1+t^n)dt - A\right]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que : $K_n = n\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}u^{k-1}}{k}(u^{1/n} - 1)\right)du$.

b) En déduire que : $K_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(k+\frac{1}{n})}$.

2. a) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_k$ où les fonctions u_k sont définies pour $k \geqslant 1$. par : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}. x \mapsto \frac{(-1)^k}{k^2(x+k)}$. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

b) En déduire l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. que l'on précisera en fonction de A et B. tels que :

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)dt \underset{n\to\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3. Soit h une fonction continue par morceaux sur $[0.1]$ et continue en 1. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0.1[$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ on ait :

$$\left| n \int_{x_0}^1 (h(t) - h(1)) \ln(1+t^n)dt \right| \leqslant \varepsilon$$

Montrer que : $n \int_0^{x_0} (h(t) - h(1)) \ln(1+t^n)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = n \int_0^1 h(t) \ln(1+t^n)dt$ converge et exprimer sa limite en fonction de A et h.

Quatrième partie

Pour $(a.b) \in \mathbb{R}^2. 0 \leqslant a < b$ et φ une fonction de classe C^1 sur $[a.b]$ à valeurs réelles. on cherche un développement asymptotique pour n tendant vers l'infini de :

$$I_n(a,b) = \int_a^b \frac{t^n \varphi(t)}{1+t^n} dt$$

1. Pour $0 \leqslant a < b < 1$. calculer $\lim_{n\to\infty} (I_n(a,b))$ et montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*. I_n(a.b) \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

2. Pour $0 \leqslant a < 1$ et $b = 1$. montrer que $I_n(a,1) \underset{n\to\infty}{=} \frac{\varphi(1).\ln(2)}{n} - \frac{\varphi(1)+\varphi'(1)}{n^2} A + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

3. Pour $1 \leqslant a < b$, montrer, en utilisant le changement de variable défini par $x = \frac{1}{t}$ qu'il existe deux réels λ et μ, que l'on précisera, tels que :

$$I_n(a,b) \underset{n\to\infty}{=} \int_a^b \varphi(t)dt + \frac{\lambda}{n} + \frac{\mu}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On distinguera les deux cas $a = 1$ et $a > 1$.

4. Pour $0 \leqslant a < 1 < b$, montrer qu'il existe deux réels λ' et μ', que l'on précisera, tels que :

$$I_n(a,b) \underset{n\to\infty}{=} \int_1^b \varphi(t)dt + \frac{\lambda'}{n} + \frac{\mu'}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail